

Räumliche Stabilität und große Verschiebungen gerader dehnstarrer Stäbe

Ruge, P.

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 24, 1973/74,
S.119-136



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Räumliche Stabilität und große Verschiebungen gerader dehnstarrer Stäbe

Von **P. Ruge**

Vorgelegt von **A. Pflüger**

(Eingegangen am 15. 7. 1974)

Summary

This paper deals with BERNOULLI's rod-model out of HOOKE material characterized by St. VENANT's torsion rigidity. By means of the Kardan-angles equilibrium conditions with big displacements and small strains are determined.

The non-linear differential equations are linearized step by step in the Kardan-angles. This process generates the stability equations according to FALK as first linear approximation.

Übersicht

Für ein BERNOULLI'sches Balkenmodell mit HOOKE'schem Material und St. VENANT'scher Torsionssteifigkeit werden mit Hilfe der Kardanwinkel Gleichgewichtslagen mit großen Verschiebungen bei kleinen Verzerrungen ermittelt.

Speziell die Abfrage des Gleichgewichtes der Momente wird schrittweise in den Kardanwinkeln linearisiert, wobei sich als erste lineare Näherungen die Stabilitätsgleichungen nach FALK [1] ergeben.

Die Stabilität eines Tragwerkes gilt als gefährdet, wenn das System auf beliebig kleine Störungen in ausgezeichneten Richtungen durch ein abruptes Anwachsen der Verschiebungen reagiert. Dies muß nicht unbedingt das absolute Versagen der Konstruktion einleiten, sondern kann durchaus zu neuen Gleichgewichtslagen führen, die wiederum stabil sind. Typisches Beispiel hierfür ist der klassische EULER-Stab, der oberhalb der kritischen Belastung in einer Zugkonstellation verharret. Die lineare Stabilitätstheorie als Eigenwertproblem gibt zwar Auskunft über die Form der kritischen Biegelinie, nicht jedoch über deren Maßstabsfaktor und setzt zudem voraus, daß die Verschiebungen des ungestörten Systems, oder wie man auch sagt im Grundzustand, so klein sind, daß die Näherungen der linearen Theorie noch zutreffen.

Beim Ausknicken eines Stabes infolge einer Längskraft H ist der Einfluß der Längsverschiebung u des Grundzustandes in Form des Faktors (1)

$$(1) \quad 1 + u' = 1 - \frac{H}{E F}$$

uninteressant.

Beim Kippen eines Trägers infolge eines Momentes nach Bild 1 begnügt man sich in der Regel mit der Näherung (3), obwohl bei Berücksichtigung der Verfor-

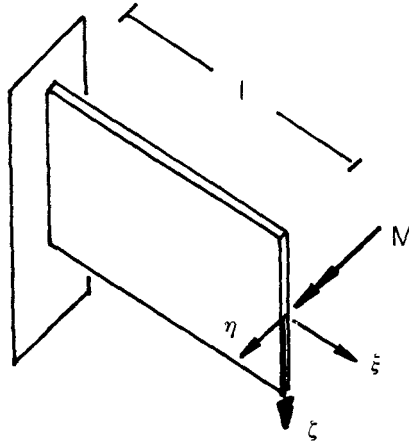


Bild 1

mungen des Grundzustandes das Verhältnis der Steifigkeiten nach (2) durchaus in die kritische Belastung eingeht [2], [6].

$$(2) \quad M_k = \frac{n\pi}{2l} \sqrt{\frac{GI EJ_z EJ_\eta}{(EJ_\eta - GI)(EJ_\eta - EJ_z)}},$$

$$(3) \quad M_k \sim \frac{n\pi}{2l} \sqrt{GIEJ_z}.$$

Den Bedürfnissen der Baupraxis wird die Näherung (3) so gut wie immer genügen, da tatsächlich nur schlanke hohe Träger kippgefährdet sind. Ehe Balken mit Biegesteifigkeiten gleicher Größenordnung nach (2) instabil werden, sind die zulässigen Spannungen im Grundzustand bereits längst überschritten, so daß das Tragwerk schon vorher unbrauchbar geworden ist.

Falls ein hochelastischer Werkstoff vorliegt, der im Bereich der kritischen Belastung noch nicht versagt, werden andererseits die Verschiebungen des Grundzustandes bereits so groß sein, daß die exakten nichtlinearen Beziehungen der Kinematik heranzuziehen sind, wie zum Beispiel in der Arbeit von KOVARI [2] geschehen.

An Stelle der dort durchgeführten, nur für einige Sonderfälle möglichen analytischen Integration mit Hilfe spezieller nichtelementarer Lösungsfunktionen,

wird hier ein Iterationsverfahren als Folge linearisierter Zustandsänderungen $\Delta \mathbf{z}$ entwickelt,

$$(4) \quad \Delta \mathbf{z}' = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{z}}) \Delta \mathbf{z} + \mathbf{r}(\tilde{\mathbf{z}}), \quad \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \Delta \mathbf{z},$$

wobei für die numerische Lösung des Differentialsystems 1. Ordnung (4) mehrere Verfahren zur Verfügung stehen, deren wichtigste außer der Kollokation und Variation in [3] zusammengestellt sind.

Die folgende Darstellung benutzt ein BERNOULLI'sches Balkenmodell mit HOOKE'schem Material, St. VENANT'scher Torsionssteifigkeit und dehnstarrer Mittellinie. Gesucht sind Gleichgewichtslagen, die sich durch große Verschiebungen auszeichnen.

Nach der Herleitung der Grundgleichungen wird die Methode der schrittweisen Näherung speziell für die Elastizitätsgleichungen und für die Transformation der Dynamik aus der Reduktion der Belastung durchgeführt. Für statisch bestimmt gestützte Tragwerke erhält man hiermit bereits die gesuchte Gleichgewichtslage über eine Folge linearer Zustandsänderungen (4) nur der Kardanwinkel.

Bezeichnungen

Zur Erleichterung des Lesens sind folgende Schreibregelungen eingeführt: Lateinische und griechische Buchstaben im Normaldruck stehen für

Skalare,

lateinische Buchstaben im Fettdruck für

Matrizen und Vektoren, projiziert auf raumfeste Achsen \mathbf{e}_i .

Griechische Buchstaben im Fettdruck bezeichnen die

Koordinatendarstellung eines Vektors im körperfesten Bezugssystem der \mathbf{a}_i .

Weiterhin sei eine Bemerkung vorangestellt über die verwendeten *Bezugssysteme*.

Neben dem raumfesten Dreibein der Achsen \mathbf{e}_i mit den Koordinaten x, y und z wird ein körperfestes System \mathbf{a}_i mit Koordinaten ξ, η und ζ verwendet. Die Projektion (5) mit der Umkehrung (6) formuliert den Zusammenhang der Vektoren \mathbf{r} und $\boldsymbol{\rho}$.

$$(5) \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} r_\xi \\ r_\eta \\ r_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{r} = \mathbf{A}^T \mathbf{r},$$

$$(6) \quad \mathbf{r} = \mathbf{A} \boldsymbol{\rho}.$$

Kinematik

Von zentraler Bedeutung ist

- a) die eindeutige Lagebestimmung der Bezugslinie mit der Orientierung der Querschnitte und

- b) eine Beschreibung der Krümmungen, die mathematisch möglichst einfach zu handhaben sein soll.

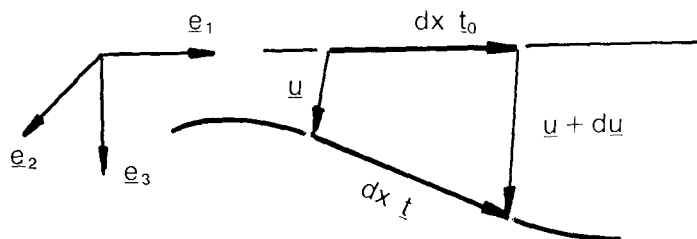


Bild 2
Bezugslinie vor und nach der Verformung

Die Verschiebungen \mathbf{u} im Bild 2 bestimmen die Bezugslinie und über den Vektorumlauf (7) die Tangente (8), wenn man die Achse \mathbf{e}_1 in Richtung der geraden Balkenachse zeigen läßt.

$$(7) \quad \begin{bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d\mathbf{u} = dx \mathbf{t},$$

$$(8) \quad \begin{bmatrix} 1 + u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \mathbf{t}.$$

Die Verschiebungskomponenten u , v und w müssen hierbei der Zwangsbedingung (9) aus der Quadratur der Gleichung (8) genügen.

$$(9) \quad (1 + u')^2 + v'^2 + w'^2 = 1.$$

Zur Orientierung der Querschnitte ist schließlich die Angabe eines Winkels $\gamma \mathbf{t}$ erforderlich, wobei die Beschreibung der Lage $\gamma = 0$ und weitere Einzelheiten in [4] nachzulesen sind. Jedoch sind die Krümmungen außerordentlich komplizierte Differentialausdrücke in den Freigrößen \mathbf{u} und γ , so daß in fast allen Arbeiten über räumliche Elastika drei Winkel und drei Verschiebungen benutzt werden, zwischen denen beim dehnstarrten Stab drei Zusatzbedingungen erfüllt sein müssen, die sogenannten kinematischen Gleichungen.

Nun ist das Ergebnis dreier Drehungen nacheinander um raumfeste Achsen abhängig von der Reihenfolge, so daß man auf mitwandernde Drehachsen übergehen muß, wie sie konstruktiv am anschaulichsten eine kardanische Aufhängung darstellt. Eine von mehreren möglichen Konstruktionen zeigt Bild 3 mit der raumfesten Kardanachse $\mathbf{k}_2 = \mathbf{e}_2$, der körperfesten Kardanachse $\mathbf{k}_1 = \mathbf{a}_1$ und der keinem dieser Systeme zuzuordnenden Achse \mathbf{k}_3 .

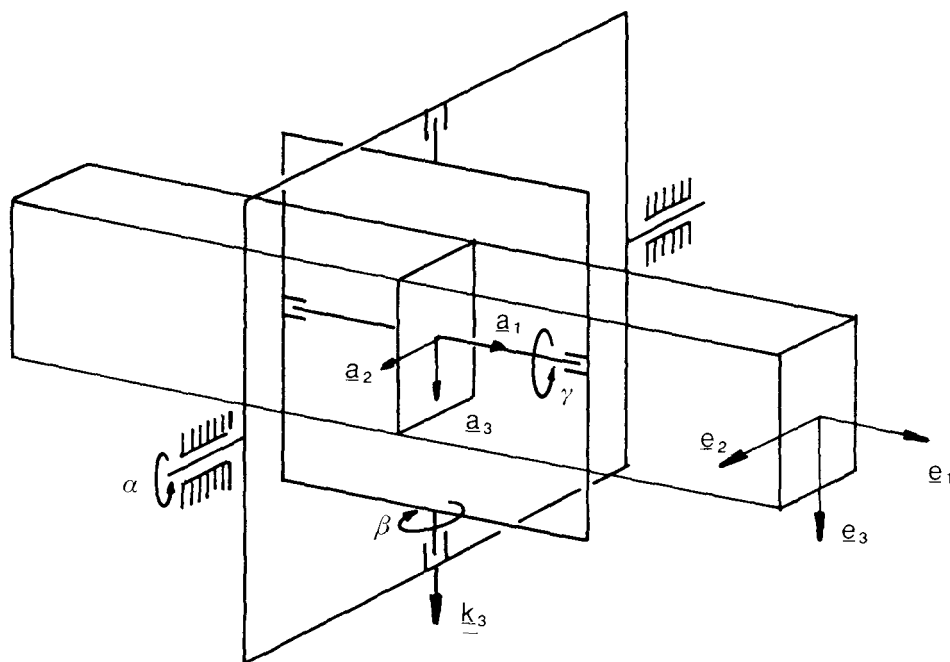


Bild 3
 Querschnittsscheibe in Kardanischer Aufhängung
 Raumfeste Achsen \mathbf{e} , Körperachsen \mathbf{a}
 Kardanwinkel α, β, γ

Wie man sich überzeugen kann, führen beliebige Aneinanderreihungen der Drehungen mit α , β und γ auf jeweils dieselbe Lage der Querschnittsscheibe. Dennoch kommt der Reihenfolge $\alpha - \beta - \gamma$ eine besondere Bedeutung zu, da Drehachse und zu drehende Richtungen \mathbf{e}_i hierbei jeweils senkrecht aufeinander stehen, was die Herleitung der Transformationsmatrix (14) durch die Multiplikation der Teildrehungen (10), (11) und (12) erleichtert.

1. Drehung mit α um die raumfeste Achse \mathbf{e}_2 :

$$(10) \quad \mathbf{r} := \mathbf{A}_1 \mathbf{r}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

2. Drehung mit β um die Kardanachse \mathbf{k}_3 :

$$(11) \quad \mathbf{r} := \mathbf{A}_2 \mathbf{r}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Drehung mit γ um die körperfeste Achse \mathbf{a}_1 :

$$(12) \quad \mathbf{r} := \mathbf{A}_3 \mathbf{r}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Die Aneinanderreihung dieser Drehungen führt auf die Koordinatendarstellung des gedrehten Vektors \mathbf{r} im raumfesten System

$$(13) \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{r} = \mathbf{D} \mathbf{r}$$

mit der Drehmatrix \mathbf{D} nach (14).

$$(14) \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \\ \sin \beta & \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Die Projektion eines Vektors \mathbf{r} in die Achsen \mathbf{a}_i des Körpersystems besorgt die transponierte Drehung (15).

$$(15) \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{r} = \mathbf{D}^T \mathbf{r}.$$

Krümmung — Torsion

Die Lageänderung des körperfesten Dreibeins beim Durchwandern der Bezugslinie ist ein Maß für die Formänderungen des Stabes: Krümmung und Torsion.

Absichtlich wird nicht von begleitendem Dreibein und Verwindung gesprochen, da diese Begriffe eng mit der Differentialgeometrie der Raumkurven verbunden sind, deren Punktquerschnitt orientierungslos ist.

Die Winkeländerungen $d\mathbf{w}$ pro Wegdifferential $dx = ds$, symbolisch zu schreiben als Summe von Krümmungen um nicht orthogonale Achsen,

$$(16) \quad \frac{d\mathbf{w}}{ds} = \alpha' \mathbf{e}_2 + \beta' \mathbf{k}_3 + \gamma' \mathbf{a}_1$$

sind nur dann zu bilden, wenn diese im selben Koordinatensystem vermaßt werden, zum Beispiel im Dreibein der körperfesten \mathbf{a}_i .

$$(17) \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{D}^T \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2^T = [0 \ 1 \ 0].$$

$$(18) \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{A}_3^T \mathbf{k}_3, \quad \mathbf{k}_3^T = [0 \ 0 \ 1].$$

$$(19) \quad \mathbf{a}_1^T = [1 \ 0 \ 0].$$

$$(20) \quad \boldsymbol{\omega}' = \begin{bmatrix} w'_\xi \\ w'_\eta \\ w'_\zeta \end{bmatrix} = \alpha' \begin{bmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \cos \gamma' \\ -\cos \beta \sin \gamma' \end{bmatrix} + \beta' \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \gamma' \\ \cos \gamma' \end{bmatrix} + \gamma' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ebenso möglich ist eine Koordinatendarstellung in x , y und z . Mit den Kardanachsen \mathbf{e}_2 , \mathbf{k}_3 und \mathbf{a}_1 im raumfesten Bezugssystem

$$(21) \quad \mathbf{e}_2^T = [0 \ 1 \ 0], \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{D} \mathbf{e}_1,$$

erhält man (22):

$$(22) \quad \mathbf{w}' = \begin{bmatrix} w'_x \\ w'_y \\ w'_z \end{bmatrix} = \alpha' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta' \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{bmatrix} + \gamma' \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Elimination der Kardanwinkel

Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen \mathbf{u} und den Kardanwinkeln ist aus der Identität der körperfesten Achse \mathbf{a}_1 mit der Tangente (8) direkt abzulesen.

$$(23) \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 + u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Die Elimination der Winkel durch die Verschiebungen nach (23)

$$(24) \quad \sin \beta = v', \quad \sin \alpha = -w' (1 - v'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

mit den Ableitungen

$$(25) \quad \beta' = v'' (1 - v'^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \alpha' = \frac{u'' w' - w'' (1 + u')}{1 - v'^2}$$

läßt, wie es auch sein muß, den Winkel γ als unabhängigen Freiheitsgrad der Querschnittsorientierung unbestimmt. Durch Einsetzen von (24) und (25) in den Vektor der Krümmungen (20) überzeugt man sich recht eindringlich von der Unzweckmäßigkeit einer direkten Differentialbeziehung 2. Ordnung zwischen Formänderungen und Verschiebungen,

$$(26) \quad \boldsymbol{\omega}' = \mathbf{A}_3^T \begin{bmatrix} [u'' w' - w'' (1 + u')] v' \\ [u'' w' - w'' (1 + u')] (1 - v'^2)^{\frac{1}{2}} \\ v'' (1 - v'^2)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \frac{1}{1 - v'^2} + \begin{bmatrix} \gamma' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobei eine der Verschiebungen noch durch die Zwangsbedingung (9) zu eliminieren wäre.

Bilanz der Gleichungen und Unbekannten

Zur Bestimmung der sechs konjugierten Paare, nämlich

- 3 Momente — 3 Winkel
- 3 Kräfte — 3 Verschiebungen

stehen ebensoviele Bestimmungsgleichungen zur Verfügung. Bei dehnstarrer Mittellinie ($1/EF = 0$) und Vernachlässigung der Querkraftverformungen sind dies

- 3 kinematische Gleichungen, bereits in (23) angeschrieben,
- 3 Elastizitätsgleichungen für die Momente und
- 6 Gleichgewichtsbedingungen.

Elastizitätsgleichungen

Von den sechs Schnittgrößen des räumlich gekrümmten Stabes nach Bild 4 werden hier nur die Momente als innere Eingepägte behandelt.

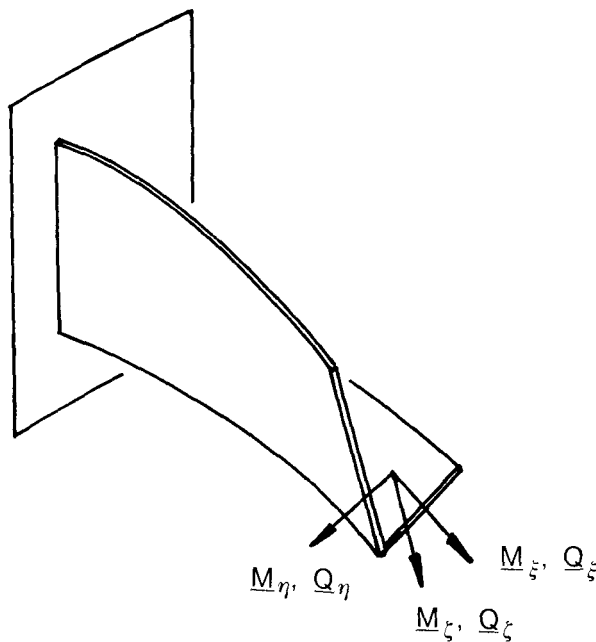


Bild 4
Schnittgrößen

Das Torsionsmoment ist proportional dem Krümmungsanteil w'_ξ in Tangentenrichtung,

$$(27) \quad \mathbf{M}_\xi = GI w'_\xi \mathbf{t},$$

die Biegemomente folgen aus der Reduktion der Normalspannungen

$$(28) \quad \sigma = E(-w'_\xi \eta + w'_\eta \xi) \mathbf{t}$$

in den Schwerpunkt.

$$(29) \quad \begin{vmatrix} 0 \\ M_\eta \\ M_\xi \end{vmatrix}_{(S)} = \int_{(F)} \begin{vmatrix} 0 \\ \eta \\ \xi \end{vmatrix} \times \sigma dF,$$

$$(30) \quad \begin{aligned} M_\eta &= E(w'_\eta J_\eta - w'_\xi J_{\eta\xi}), \\ M_\xi &= E(-w'_\eta J_{\eta\xi} + w'_\xi J_\xi). \end{aligned}$$

Die Zusammenfassung aller drei Elastizitätsgleichungen führt auf die Schreibweise (31) mit der Matrix \mathbf{F} der Flächenmomente 2. Grades und $\mathbf{A} = GI$, $\mathbf{B} = EJ_\eta$, $\mathbf{C} = EJ_\xi$, $\mathbf{D} = EJ_{\eta\xi}$.

$$(31) \quad \begin{vmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & -\mathbf{D} \\ 0 & -\mathbf{D} & \mathbf{C} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w'_\xi \\ w'_\eta \\ w'_\xi \end{vmatrix} = \mathbf{F} \boldsymbol{\omega}'.$$

Gleichgewicht

Die Formulierung des Gleichgewichtes ist auf zweierlei Weise möglich.

Einmal werden die Schnittgrößen von vornherein in den charakteristischen Richtungen angegeben; das heißt, Längskraft und Torsionsmoment parallel zur Tangente und Biegemoment und Querkraft in der Querschnittsebene. Beim Zuwachs einer Größe ist zu bedenken, daß Betrag und Richtung sich ändern.

$$(32) \quad d(M_\xi \mathbf{a}_1) = dM_\xi \mathbf{a}_1 + M_\xi d\mathbf{a}_1.$$

Oder man beschreibt die Gleichgewichts-Differentialbeziehungen zunächst für die Schnittgrößen $M_i \mathbf{e}_i$ sowie $Q_i \mathbf{e}_i$ und projiziert diese anschließend mit Hilfe der Matrix \mathbf{D}^T in die Körperachsen \mathbf{a}_i .

Bild 5 zeigt ein Stabelement der Länge $ds = dx$ im Gleichgewicht der Schnittgrößen und der äußeren Belastungen \mathbf{q} und \mathbf{m} .

Nach dem Grenzübergang ds gegen Null führt dies auf das Momentengleichgewicht (33)

$$(33) \quad M'_\xi \mathbf{a}_1 + M'_\eta \mathbf{a}_2 + M'_\xi \mathbf{a}_3 + \mathbf{m} + M_\xi \mathbf{a}'_1 + M_\eta \mathbf{a}'_2 + M_\xi \mathbf{a}'_3 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

und das Kräftegleichgewicht (34).

$$(34) \quad Q'_\xi \mathbf{a}_1 + Q'_\eta \mathbf{a}_2 + Q'_\xi \mathbf{a}_3 + \mathbf{q} + Q_\xi \mathbf{a}'_1 + Q_\eta \mathbf{a}'_2 + Q_\xi \mathbf{a}'_3 = \mathbf{0}.$$

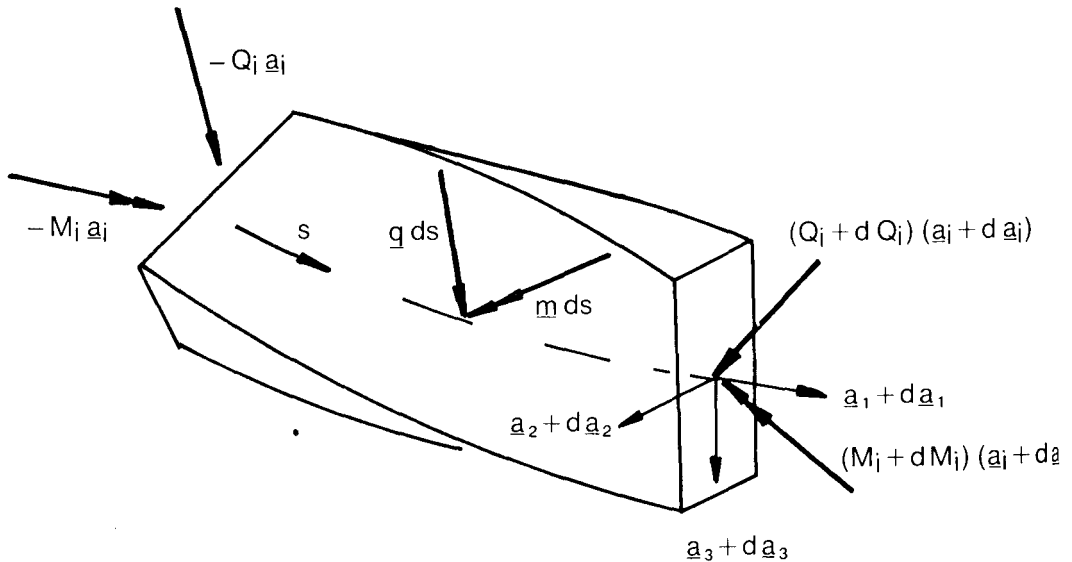


Bild 5

Stabelement im Gleichgewicht der Schnittgrößen und Belastungen

Mit den Differentialquotienten da_i/ds

$$(35) \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{D} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\sin \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ 0 & 0 & \cos \beta \\ 0 & -\cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma' \\ \alpha' \\ \beta' \end{vmatrix} = \mathbf{X} \mathbf{z}',$$

$$(36) \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{D} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}'_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3 & \begin{vmatrix} d_{32} \\ 0 \\ -d_{12} \end{vmatrix} & -\cos \gamma \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma' \\ \alpha' \\ \beta' \end{vmatrix} = \mathbf{Y} \mathbf{z}',$$

$$(37) \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{D} \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}'_3 = \begin{vmatrix} -\mathbf{a}_2 & \begin{vmatrix} d_{33} \\ 0 \\ -d_{13} \end{vmatrix} & \sin \gamma \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma' \\ \alpha' \\ \beta' \end{vmatrix} = \mathbf{Z} \mathbf{z}'$$

und deren Koordinatendarstellung in Körperachsen \mathbf{a}_i

$$(38) \quad \boldsymbol{\alpha}'_1 = \mathbf{D}^T \mathbf{a}'_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ w'_\zeta \\ -w'_\eta \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}'_2 = \begin{vmatrix} -w'_\zeta \\ 0 \\ w'_\xi \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}'_3 = \begin{vmatrix} w'_\eta \\ -w'_\xi \\ 0 \end{vmatrix}$$

erhält man schließlich die Gleichgewichtsbedingungen in der prägnanten Schreibweise (39), (40),

$$(39) \quad \begin{vmatrix} M'_\xi \\ M'_\eta \\ M'_\zeta \end{vmatrix} + \boldsymbol{\omega}' \times \begin{vmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{vmatrix} + \mathbf{D}^T \mathbf{m} + \begin{vmatrix} 0 \\ -Q_\zeta \\ Q_\eta \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

$$(40) \quad \begin{vmatrix} Q'_z \\ Q'_\eta \\ Q'_z \end{vmatrix} + \boldsymbol{\omega}' \times \begin{vmatrix} Q_z \\ Q_\eta \\ Q_z \end{vmatrix} + \mathbf{D}^T \mathbf{q} = \mathbf{0},$$

wenn man noch die schiefsymmetrische Matrix \mathbf{S} nach (41) als Kreuzprodukt deutet.

$$(41) \quad \mathbf{s} \times \mathbf{d} = \begin{vmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{S} \mathbf{d}.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen in raumfesten Koordinaten erhält man direkt aus (33) und (34), wenn man ξ, η, ζ und \mathbf{a}_i durch x, y, z und \mathbf{e}_i ersetzt und deren Unveränderlichkeit berücksichtigt.

$$(42) \quad \begin{vmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

$$(43) \quad \begin{vmatrix} Q'_x \\ Q'_y \\ Q'_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Im allgemeinen Fall folgen aus der simultanen Integration der zwölf nicht-linearen Differentialgleichungen (23), (31), (39) und (40) erster Ordnung die gesuchten zwölf Zustandsgrößen, wobei darauf zu achten ist, daß für die Schnittgrößen übereinstimmende Koordinatendarstellungen vorliegen.

Für den Sonderfall statisch bestimmt gestützter Stäbe wird man zweckmäßig auf die Gleichungen (42) und (43) zurückgreifen, da die Elimination der Querkkräfte hierbei besonders mühelos vorzunehmen ist. Für einen Kragträger mit konstanter Streckenlast \mathbf{q} zum Beispiel erhält man das Momentengleichgewicht in der Form (44)

$$(44) \quad \begin{vmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{vmatrix} (l - x) = \mathbf{0}$$

mit der Transformation (45) in körperfeste Achsen,

$$(45) \quad \begin{vmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{vmatrix} = \mathbf{D}^T \begin{vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{vmatrix},$$

die zum Vergleich mit den inneren Eingepägten aus den Elastizitätsgleichungen (31) notwendig ist.

Lösungsweg

Die analytische Lösung der Grundgleichungen bleibt in der Regel ein hoffnungsloses Unterfangen, gleichgültig in welcher mathematischen Form man den physikalischen Sachverhalt darstellt. Ein Blick auf die Elastizitätsgleichungen (31) und das Momentengleichgewicht (44) mit (45) zeigt, daß ein Vergleich der Momente

$$(46) \quad \mathbf{D}^T \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \mathbf{F} \boldsymbol{\omega}'$$

dann ein lineares Differentialgleichungssystem für die Kardanwinkel ergibt, wenn man die Methode der schrittweisen Näherung anwendet, die ausgehend von einem bekannten oder vorgegebenen Zwischenzustand \mathbf{z} über einen linearen Zuwachs $\Delta \mathbf{z}$ zu einer verbesserten Konstellation $\mathbf{z} = \mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}$ führt. Für den Vergleich (46) bedeutet dies die Integration des Momentengleichgewichtes (42) bei bekannten Winkeln γ, α, β und eine Formulierung der Matrix \mathbf{D} und des Krümmungsvektors (20) linear in den Winkelzuwüchsen $\Delta \gamma, \Delta \alpha, \Delta \beta$ sowie deren Ableitungen.

Linearzuwüchse der Kardanwinkel

Den Linearzuwachs zum Beispiel der Krümmungskomponente w'_ξ erhält man entweder über den endlichen Zuwachs Δw der Kardanwinkel mit den Linearisierungen $\sin \Delta w \sim \Delta w, \cos \Delta w \sim 1$,

$$(47) \quad w'_\xi = \alpha' \sin \beta + \gamma' = (\alpha' + \Delta \alpha') \sin (\beta + \Delta \beta) + (\gamma' + \Delta \gamma'),$$

$$(48) \quad w'_\xi = w'_\xi + \Delta \beta \alpha' \cos \beta + \Delta \alpha' \sin \beta + \Delta \gamma',$$

oder aber über die Umwandlung des totalen Differentials (49)

$$(49) \quad dw'_\xi = \alpha' \cos \beta d\beta + d\alpha' \sin \beta + d\gamma'$$

in die Differenz (50),

$$(50) \quad \Delta w'_\xi = \alpha' \cos \beta \Delta \beta + \Delta \alpha' \sin \beta + \Delta \gamma',$$

eine Methode, die bequemer und deshalb vorzuziehen ist. Tilden kennzeichnen hier wie im Folgenden Größen in der aktuellen, in der Regel Noch-Nicht-Gleichgewichtslage.

Auf diese Weise erhält man die Verbesserungen aller drei Krümmungskomponenten in der geordneten Matrizenschreibweise (51)

$$(51) \quad \begin{bmatrix} w'_\xi \\ w'_\eta \\ w'_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w'_\xi \\ w'_\eta \\ w'_\zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \sin \beta & 0 \\ 0 & \cos \beta \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\cos \beta \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \gamma' \\ \Delta \alpha' \\ \Delta \beta' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha' \cos \beta \\ w'_\zeta & 0 & -\alpha' \sin \beta \cos \gamma \\ -w'_\eta & 0 & \alpha' \sin \beta \sin \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \gamma \\ \Delta \alpha \\ \Delta \beta \end{bmatrix}$$

und deren Kurzform (52).

$$(52) \quad \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{z}' + \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{z}.$$

Zur Projektion der aktuellen Momente \mathbf{M} aus der Integration der Gleichungen (42) und (43) in die verbesserte Lage ist die Projektionsmatrix \mathbf{D}^T linear in $\Delta \mathbf{z}$ anzugeben.

$$(53) \quad \mathbf{D} = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] + [\Delta \mathbf{a}_1 \Delta \mathbf{a}_2 \Delta \mathbf{a}_3].$$

Mit den Differentialquotienten $d\mathbf{a}_i/dx$ nach (35), (36) und (37) sind auch die endlichen Zuwächse $\Delta \mathbf{a}_i$ bekannt

$$(54) \quad \Delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{X} \Delta \mathbf{z}, \quad \Delta \mathbf{a}_2 = \mathbf{Y} \Delta \mathbf{z}, \quad \Delta \mathbf{a}_3 = \mathbf{Z} \Delta \mathbf{z}$$

und damit die gesuchten Momentenkomponenten M_ξ , M_η und M_ζ .

$$(55) \quad \begin{bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{bmatrix} = \mathbf{D}^T \mathbf{M} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^T \mathbf{X} \\ \mathbf{M}^T \mathbf{Y} \\ \mathbf{M}^T \mathbf{Z} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{z} = \mathbf{D}^T \mathbf{M} + \mathbf{C} \Delta \mathbf{z}.$$

Iteration

Mit einer Konstellation \mathbf{z}_0 beginnend, die in der Regel mit der geraden Ausgangslage zusammenfallen wird, falls man nicht zufällig über Ergebnisse einer ähnlichen Aufgabe verfügt, führt der Vergleich (56) der Momente aus der Integration der Gleichgewichtsbedingungen (42) mit (43) in der Koordinatendarstellung (55) und der Momente aus den Elastizitätsgleichungen (31) mit (52) auf ein Linearsystem der Winkelzuwächse $\Delta \mathbf{z}$

$$(56) \quad \mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}' + \mathbf{A} \Delta \mathbf{z}' + \mathbf{B} \Delta \mathbf{z}) = \mathbf{D}^T \mathbf{M} + \mathbf{C} \Delta \mathbf{z}$$

in der Normalform (57)

$$(57) \quad \Delta \mathbf{z}' + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B} - \mathbf{F}^{-1}\mathbf{C})\Delta \mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}^T \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega}')$$

mit

$$(58) \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan \beta \cos \gamma & \tan \beta \sin \gamma \\ 0 & \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} & -\frac{\sin \gamma}{\cos \beta} \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{BC-D^2} & \frac{D}{BC-D^2} \\ 0 & \frac{D}{BC-D^2} & \frac{B}{BC-D^2} \end{bmatrix},$$

und damit zu einer verbesserten Lage \mathbf{z}_1 .

$$(59) \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{z}_0.$$

Die hierzu gehörenden Momente bestimmt man aufs Neue durch die Integration der Gleichungen (42) und (43) und wiederholt die Momentenkontrolle (57) solange, bis die rechte Seite identisch verschwindet, beziehungsweise der relative Zuwachs der Verbesserungen einen vorgegebenen kleinen Wert unterschreitet.

Räumliche Stabilität ebener Biegelinien

Die entwickelten Formeln und die ihnen zugrundeliegende Kreiselkinematik sind nicht ganz einfach zu übersehen, so daß zumindestens der erste Iterationsschritt ausgeführt werden soll, der ja auf die bekannten linearen Zusammenhänge führen muß.

Gegeben sei ein Kragträger mit Momenten $M_0(x)$ aus der Reduktion der äußeren Last am geraden Balken. Gesucht ist die Biegelinie, wobei zur Vereinfachung der Flächenmatrix F (31) Querschnittshauptachsen, Körperachsen a_i sowie e_i gleichgerichtet sein mögen. Mit

$$(60) \quad A = D = E, \quad B = 0, \quad F = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} M_{x0} \\ M_{y0} \\ M_{z0} \end{bmatrix}, \quad \omega' = 0,$$

den Untermatrizen X , Y und Z nach (35), (36) und (37)

$$(61) \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und damit C nach (55)

$$(62) \quad C = \begin{bmatrix} M^T X \\ M^T Y \\ M^T Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -M_{z0} & M_{y0} \\ M_{z0} & 0 & -M_{x0} \\ -M_{y0} & M_{x0} & 0 \end{bmatrix}$$

ist das Differentialgleichungssystem (57) hinzuschreiben.

$$(63) \quad \Delta z' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{M_{z0}}{A} & \frac{M_{y0}}{A} \\ \frac{M_{z0}}{B} & 0 & -\frac{M_{x0}}{B} \\ -\frac{M_{y0}}{C} & \frac{M_{x0}}{C} & 0 \end{bmatrix} \Delta z = \begin{bmatrix} \frac{M_{x0}}{A} \\ \frac{M_{y0}}{B} \\ \frac{M_{z0}}{C} \end{bmatrix}.$$

Behandelt man nacheinander die ebene Biegung mit $M_{y0}(x)$,

$$(64) \quad \begin{bmatrix} \Delta \gamma' \\ \Delta \alpha' \\ \Delta \beta' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\Delta \beta}{A} \\ 0 \\ \frac{\Delta \gamma}{C} \end{bmatrix} M_{y0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{M_{y0}}{B},$$

die ebene Biegung mit $M_{z0}(x)$

$$(65) \quad \begin{bmatrix} \Delta \gamma' \\ \Delta \alpha' \\ \Delta \beta' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta \alpha}{A} \\ -\frac{\Delta \gamma}{B} \\ 0 \end{bmatrix} M_{z0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{M_{z0}}{C}$$

und die reine Drillung mit $M_{x0}(x)$,

$$(66) \quad \begin{bmatrix} \Delta \gamma' \\ \Delta \alpha' \\ \Delta \beta' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta \beta}{B} \\ -\frac{\Delta \alpha}{C} \end{bmatrix} M_{x0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{M_{x0}}{A},$$

so erkennt man jeweils die inhomogenen Gleichungen der Theorie erster Ordnung und die Stabilitätsgleichungen des Kippens, wobei die Verformungen des Grundzustandes zunächst nicht in Erscheinung treten.

In einem nächsten Schritt ist zu prüfen, ob die aus der Integration der inhomogenen Gleichungen gewonnenen Lagen tatsächlich Gleichgewichtslagen sind. Für die ebene Biegung infolge $M_{y0}(x)$ erhält man aus (64)

$$(67) \quad A \alpha'_0 = \alpha'_1 = \frac{M_{y0}(x)}{B}$$

und weiter durch Integration $\alpha_1(x)$. Die Biegemomente aus der Reduktion der Belastung am derart verformten Balken liefert die Integration der Gleichungen (42) und (43). Nur falls die Winkel $\alpha_1(x)$ sehr viel kleiner als Eins sind, das heißt der Tangentenvektor \mathbf{a}_1

$$(68) \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1(x) \\ 0 \\ -\sin \alpha_1(x) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

numerisch mit der Richtung \mathbf{e}_1 übereinstimmt, ändert sich das Moment $M_{y1}(x)$ zahlenmäßig nicht mehr gegenüber $M_{y0}(x)$ aus der Reduktion am geraden Balken.

Mit $\alpha' = M_{y0}(x)/B$ und α , somit

$$(69) \quad \mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{M_{y0}}{B}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} M_{y1}, \quad \boldsymbol{\omega}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{M_{y0}}{B},$$

den Untermatrizen \mathbf{X} , \mathbf{Y} und \mathbf{Z} nach (35), (36), (37)

$$(70) \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\cos \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

und der daraus aufgebauten Matrix \mathbf{C} nach (55)

$$(71) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_{y1}$$

erhält man das System (72) in der zweiten Iterationsstufe.

$$(72) \quad \Delta \mathbf{z}' - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{M_{y0}}{B} - \frac{M_{y1}}{A} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{M_{y1}}{C} - \frac{M_{y0}}{B} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_{y1}}{B} - \frac{M_{y0}}{B} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Falls sich die Momente $M_{y0}(x)$ und $M_{y1}(x)$ nicht mehr unterscheiden, die mittlere Gleichung in (72) also identisch erfüllt ist,

$$(73) \quad \Delta \alpha' = \frac{1}{B} (M_{y1} - M_{y0}) = 0, \quad M_{y0} = M_{y1} = M_y(x),$$

verbleibt das homogene System (74) mit Berücksichtigung der Verformungen im Grundzustand,

$$(74) \quad \begin{aligned} \Delta \gamma' + M_y \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \Delta \beta &= 0, \\ \Delta \beta' + M_y \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) \Delta \gamma &= 0, \end{aligned}$$

wie es bereits FALK angegeben hat, allerdings von vornherein mit der Beschränkung auf sehr kleine Verschiebungen im Grundzustand.

Eine analoge Rechnung für ebene Biegung infolge $M_z(x)$ und reine Drillung infolge $M_x(x)$ zeigt formal keine Übereinstimmung mit den Formeln nach FALK. Die dort eingeführten Winkel beschreiben Drehungen nacheinander um raumfeste Achsen, was für infinitesimale Rotationen im Rahmen einer linearen Theorie eindeutig ist. Von den Kardanachsen bleibt dagegen nur eine, bei der hier gewählten Aufhängungen nach Bild 3 die Achse $\mathbf{k}_2 = \mathbf{e}_2$ mit dem Winkel α raumfest, während die anderen bei der räumlichen Biegung ihre Richtung verändern. Wollte man eine zu (74) symmetrische Kippgleichung für ein Moment $M_z(x)$ erhalten, wäre die Kardansche Aufhängung so einzurichten, daß die Achse \mathbf{k}_3 mit dem Drehwinkel β raumfest bleibt.

Kritik der linearisierten Kippformeln

Brauchbare Kippgleichungen im Rahmen einer linearen Theorie sind an sich nur die Differentialsysteme (64), (65) und (66) mit den Momenten \mathbf{M}_0 aus der Reduktion der äußeren Belastung am geraden Balken.

$$(64) \quad \begin{aligned} \Delta \gamma' - \frac{\Delta \beta}{A} M_{y0} &= 0, \\ \rightarrow \quad \Delta \beta' + \frac{\Delta \gamma}{C} M_{y0} &= 0. \end{aligned}$$

Sind die Flächenmomente eines gedrungenen Querschnitts tatsächlich von gleicher Größenordnung, so daß die Differenzen (A—B) und (C—B) in die Kipp last eingehen, wird der Balken schon vor dem kritischen Ereignis so große ebene Verschiebungen aufweisen, daß das Momentengleichgewicht im Grundzustand als

nichtlineare Differentialgleichung erscheint (42), (43). Erst wenn sich bei deren iterativer Lösung über eine Folge linearer Zustandsänderungen die Schnittgrößen M_{yn} in einem n . Schritt nicht mehr verändern, ist die Gleichung (74) in sich richtig anzuschreiben.

$$(74) \quad \begin{aligned} & \Delta \gamma' - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) M_{yn} \Delta \beta = 0, \\ \rightarrow & \Delta \beta' + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) M_{yn} \Delta \gamma = 0. \end{aligned}$$

Zur Lösung der linearen Gleichungen 1. Ordnung

Es fällt auf, daß die hier gefundenen Differentialbeziehungen zur Beschreibung der Stabilität einer ebenen Biegelinie infolge $M_{y0}(x)$ zunächst nicht mit der allerorten anzutreffenden Gleichung (75)

$$(75) \quad \gamma'' + \frac{1}{AC} M_{y0}^2 \gamma = 0$$

übereinstimmen. Man ist versucht, eine Unbekannte zum Beispiel $\beta(x)$ aus dem System (64) zu eliminieren,

$$(76) \quad \gamma'' - \frac{M'_{y0}}{M_{y0}} \gamma' + \frac{1}{AC} M_{y0}^2 \gamma = 0,$$

doch ist diese Operation unzulässig, da der Nenner M_{y0} im mittleren Glied nicht im gesamten Stabbereich von Null verschieden sein wird. Die Brauchbarkeit der klassischen Kippgleichung (75) wird allerdings durch die Ergebnisse aus der numerischen Integration des Systems (64) bestätigt, was die übliche Ableitung nicht von dem Fehler freispricht, die Gleichberechtigung aller drei beteiligten Winkel verletzt zu haben.

Schlußbemerkungen

Die ausführlich behandelten Kippgleichungen sind ein Beispiel für linearisierte Systeme, die in den allgemeinen zwölf Differentialbeziehungen 1. Ordnung enthalten sind.

Ausgehend von einem gegebenen Ausgangszustand \mathbf{z} erhält man eine um $\Delta \mathbf{z}$ verbesserte Konstellation $\mathbf{z} = \mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}$, wenn man das lineare System $\Delta \mathbf{z}' + \mathbf{A} \Delta \mathbf{z} = \mathbf{r}(\mathbf{z})$ alternativ wie folgt determiniert:

1. Gleichgewicht in der Ausgangslage \mathbf{z} und Transformation der Dynamik aus der Reduktion der äußeren Last und der Schnittgrößen in die gesuchte verbesserte Lage \mathbf{z} . Oder
2. Gleichgewicht in der verbesserten Lage \mathbf{z} und Transformation in das gegebene Ausgangssystem.

Die Kippgleichungen ergaben sich nach 1., das Eigenwertproblem für räumliches Knicken infolge einer Längskraft $Q_x = -H$ folgt dem Konzept 2., indem man das Momentengleichgewicht (42) für kleine Winkel anschreibt

$$(77) \quad \begin{vmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{vmatrix} + H \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = 0$$

und mit den Momenten aus dem Elastizitätsgesetz (31) verknüpft,

$$(78) \quad \begin{vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} GI & 0 & 0 \\ 0 & EJ_y & -EJ_{yz} \\ 0 & -EJ_{yz} & EJ_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma' \\ \alpha' \\ \beta' \end{vmatrix},$$

das die in bekannte Ausgangsrichtungen projizierten Zustandsgrößen enthält.

Eine gleichmäßige Berücksichtigung beider unter 1. und 2. genannten Gesichtspunkte ist einer nichtlinearen Theorie vorbehalten, die im Fall vermuteter Instabilitäten als Last-Verformungsrechnung mit kleinen Störungen zur Anregung des kritischen Ereignisses durchzuführen ist.

Literaturverzeichnis

- [1] Falk, S.: Die einfachste lineare Theorie dritter Ordnung des geraden elastischen Balkens. Vortrag auf der GAMM-Tagung 1974 in Bochum.
- [2] Kovari, K.: Räumliche Verzweigungsprobleme des dünnen elastischen Stabes mit endlichen Verformungen. Ingenieur-Archiv 37, Band 1969, S. 393—416.
- [3] Schäfer, H.: Numerische Ermittlung von Übertragungsmatrizen. Der Stahlbau, Heft 2, 1970, S. 54—60.
- [4] Ruge, P.: Ein finites Modell für eindimensionale Elastika. Dissertation TU Braunschweig, 1973.
- [5] Magnus, K.: Kreisel, Theorie und Anwendung. Springer Verlag, Berlin 1971, S. 32.
- [6] Pflüger, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik, 2. Auflage. Springer Verlag, Berlin 1964, S. 289.